Introduction au Tome II

Ce deuxième tome contient les deuxième et troisième parties de notre livre qui sont consacrées respectivement à la cohomologie et à l'étude des variétés.

Alors qu'en homologie, les homomorphismes bords d'un complexe de chaînes C_* sont des applications de C_q dans C_{q-1} et vont donc dans le sens des indices décroissants, leurs analogues $\delta^q : C^q \to C^{q+1}$ pour la cohomologie satisfont $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$ et vont dans le sens des indices croissants. On obtient ainsi un complexe de cochaînes C^* auquel on associe des modules de cocycles, de cobords et de cohomologie.

Historiquement, le premier exemple important de théorie cohomologique est celui du complexe de cochaînes $\Omega^*(U)$ des formes différentielles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Nous ne donnons ci-dessous que quelques indications concernant ce complexe, car son étude relève de l'analyse et sort du cadre de ce livre. Son importance joua un rôle historique essentiel pour le développement d'autres théories cohomologiques issues de la topologie.

Rappelons que pour tout entier $q \geq 0$, une *q-forme différentielle sur* U est une expression de la forme

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n} u_{i_1,\ldots,i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$$

où $u_{i_1,\ldots,i_q} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Les produits extérieurs $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ satisfont aux règles suivantes : si deux indices sont les mêmes, ce produit est nul et si on échange deux indices, l'expression change de signe. La forme ω peut alors s'écrire

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} u_{i_1,\ldots,i_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$$

et l'on voit que si $q > n$, $\omega = 0$ car un des indices doit nécessairement apparaître deux fois. En fait, cette écriture de ω est unique et l'ensemble

$\Omega^q(U)$ des q-formes différentielles est un espace vectoriel réel qui est nul si $q > n$. On étend la définition de $\Omega^q(U)$ à tout entier q en posant $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ et $\Omega^q(U) = 0$ si $q < 0$.

On construit, pour tout entier $0 \leq q \leq n-1$, une application $\mathbb{R}$-linéaire $d^q : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)$ en posant,

$$d^q\omega(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_q \leq n} \partial u_{i_1,\ldots,i_q}/\partial x_j(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q};$$

si $q < 0$ ou $q \geq n$, on pose $d^q = 0$. Ce sont les *différentielles extérieures* de l'ouvert U ; elles généralisent la notion de différentielle totale df d'une application différentiable et correspondent dans le cas $n = 3$ au gradient si $q = 0$, au rotationnel si $q = 1$ et à la divergence si $q = 3$.

Les propriétés du produit extérieur montrent que les applications $\mathbb{R}$-linéaires $d^q : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)$ forment un complexe $\Omega^*(U)$ de cochaînes de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. C'est le *complexe des formes différentielles de* U.

Il est possible de généraliser la construction ci-dessus en remplaçant l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ par une variété différentiable M de dimension n.

Georges de Rham [1] démontra en 1928 son célèbre théorème qui affirme que la cohomologie de ce complexe est isomorphe au dual de l'homologie singulière à coefficients réels de M. Cette correspondance permet d'expliquer de nombreux phénomènes de la physique, tels l'électromagnétisme et la théorie des tourbillons dans les fluides. Elle montre l'importance de la topologie dans la modélisation mathématique de certaines branches de la physique. Elle justifie par exemple mathématiquement le deuxième théorème de Helmholtz : l'axe d'un tourbillon ne peut avoir d'extrémités dans le fluide ; soit celles-ci se situent sur la frontière du fluide, soit l'axe du tourbillon décrit une courbe fermée. En effet, dans les deux cas, le complémentaire de l'axe dans le fluide contient un 1-cycle dont la classe d'homologie est non nulle et, par le théorème de de Rham, il existe une forme différentielle ω de degré 1 telle que $d\omega = 0$ mais ω n'est pas la différentielle totale d'une fonction. Cela se traduit par l'existence d'un champ de vitesses v dans le fluide qui est laminaire (c'est-à-dire de rotationnel nul) mais tel que v ne dérive pas d'un potentiel. Ce phénomène se produit dans le tourbillon créé dans l'eau s'écoulant d'une baignoire dès le moment où la couche d'air aspirée par l'écoulement rencontre celle qui

1. Mathématicien suisse (1903-1990).

est située dans le tuyau d'évacuation. A contrario, dans celui des trombes d'eau, l'axe est formé d'une colonne d'eau joignant la surface de la mer et un nuage, et le tourbillon est constitué d'un courant d'air tourbillonnant autour de la trombe :



Trombe d'eau dans le golfe du Mexique

Dans les deux cas précédents, l'axe du tourbillon possède des extrémités. Les fumeurs de cigares expérimentés arrivent à produire des ronds de fumée qui sont en fait des tourbillons autour d'une courbe fermée simple, ce qui illustre la deuxième possibilité.

Une façon de construire un complexe de cochaînes est de partir d'un complexe de chaînes de groupes abéliens et de lui appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, A)$ où A est un anneau. On obtient ainsi un complexe de cochaînes de A-modules et des modules de cohomologie associés. Cette construction est le pendant, pour la cohomologie, de l'homologie à coefficients considérée au Chapitre 13.

Si on applique cette construction au complexe de chaînes singulières d'un espace topologique X, on obtient des groupes $H^q(X; A)$ de cohomologie à coefficients dans A. Un aspect important de la cohomologie des espaces topologiques est le fait que c'est une théorie contravariante : si $f : X \to Y$ est une application continue, f induit des homomorphismes $f^* : H^q(Y; A) \to H^q(X; A)$ en cohomologie et on a donc un renversement de sens pour les homomorphismes induits. Cette contravariance est utile à l'étude des applications continues f d'un espace X dans une sphère S^n ; si ζ^* est un générateur de $H^n(S^n; \mathbb{Z})$, nous verrons dans le §15.4 que l'élément $f^*(\zeta^*)$ de $H^n(X; \mathbb{Z})$ dit « caractéristique » reflète les propriétés topologiques de f.

Il est possible de construire plusieurs produits reliant la cohomologie et l'homologie d'un espace topologique et leur étude fait l'objet du Chapitre 16.

Comme nous l'avons évoqué dans l'Avant-propos, les variétés occupent une place centrale en mathématiques, en physique et en astronomie. Nous croyons vivre dans une variété spatiale à trois dimensions ou, si nous prenons en considération le temps, dans une variété spatio-temporelle à quatre dimensions. Les modèles cosmologiques tentent de donner une description globale de ces variétés mais les questions soulevées sont d'une extrême difficulté : ces variétés sont-elles à bord ou admettent-elles des singularités du fait de la présence des trous noirs, sont-elles compactes ou non ? Même si la réponse ne sera peut-être jamais connue, la topologie apporte sa contribution en donnant un cadre précis pour l'élaboration et la discussion de ces modèles.

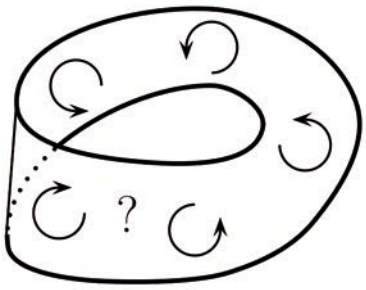
Il n'y a bien sûr aucune raison mathématique de se restreindre à l'étude des variétés de dimensions trois et quatre et nous verrons dans le dernier chapitre de ce livre que les propriétés des variétés diffèrent suivant que celles-ci sont de basses dimensions (1, 2 et 3), de dimension 4 ou de grandes dimensions (supérieures ou égales à 5). Les variétés à un nombre arbitraire de dimensions se rencontrent en physique : une variante de la théorie des cordes postule qu'une description complète de l'Univers nécessite l'introduction d'une variété à 10 (ou 11) dimensions dont 6 (ou 7) échapperaient à notre observation.

Il n'y a cependant nul besoin d'avoir recours à des théories aussi spéculatives pour illustrer l'utilité des variétés à un nombre quelconque de dimensions. Par exemple, en mécanique statistique, le mouvement libre de N particules représentées par des points matériels dans l'espace usuel prend place dans un espace euclidien à $3N+1$ dimensions (une dimension de temps et trois dimensions d'espace pour chaque particule). Il se situe en fait dans une sous-variété ouverte de cet espace si l'on admet que les points matériels ne peuvent pas se rencontrer en un même point d'espace en un instant donné.

Le concept d'orientation est l'un des plus importants de la géométrie. Il a sa source en algèbre linéaire et est au cœur de la description de nombreux phénomènes de la physique, entre autres les gyroscopes en mécanique classique et les phénomèmes électromagnétiques (et donc l'utilisation de la boussole pour s'orienter sur la Terre). La question de l'orientabilité ou

non de l'espace-temps relativiste qui décrit l'Univers, est un sujet controversé de cosmologie.

Les variétés, étant localement homéomorphes à des espaces euclidiens, sont toujours localement orientables, mais il n'est pas toujours possible de « recoller » de façon cohérente ces orientations pour produire une orientation globale de la variété, comme le montre l'exemple du ruban de Moebius :



Nous consacrons le Chapitre 18 à l'étude détaillée des diverses notions d'orientation en lien avec l'homologie.

La dualité de Poincaré et ses généralisations, traitées au Chapitre 19, sont construites au moyen des produits définis dans le Chapitre 16 et établissent un isomorphisme entre l'homologie en dimension q d'une variété orientable de dimension n et sa cohomologie en dimension $n - q$. Cette propriété fondamentale des variétés montre par exemple que la caractéristique d'Euler d'une variété close de dimension impaire est nulle. Elle permet de définir des formes bilinéaires dites d'intersection dont les propriétés algébriques sont essentielles à la compréhension des variétés.

Le dernier chapitre décrit, le plus souvent sans démonstration, les avancées spectaculaires de la théorie des variétés obtenues ces cinquante dernières années, en lien avec les matières étudiées dans les chapitres précédents de ce livre.

Illustrations du Tome II :

Nous remercions Eric Weisstein, Mathworld.com et Wolfram Research, Inc. (www.wolfram.com) pour leur permission de faire un usage restrictif, page 85, en les modifiant, des deux figures représentant la sphère cornue d'Alexander.

Nous sommes également reconnaissants aux personnes et institutions ci-dessous d'autoriser le libre accès et la reproduction des images et figures, parfois légèrement modifiées, citées ci-après :

Page 9 : trombe d'eau au large de la Floride ; Joseph Golden (1969), National Oceanic and Atmospheric Administration ; Wikipedia, article Waterspout,
http ://en.wikipedia.org/wiki/Waterspout.

Page 87 : nœud sauvage ; Jkasd (2008) ; Wikipedia, article Wild knot,
http ://en.wikipedia.org/wiki/Wild_knot.