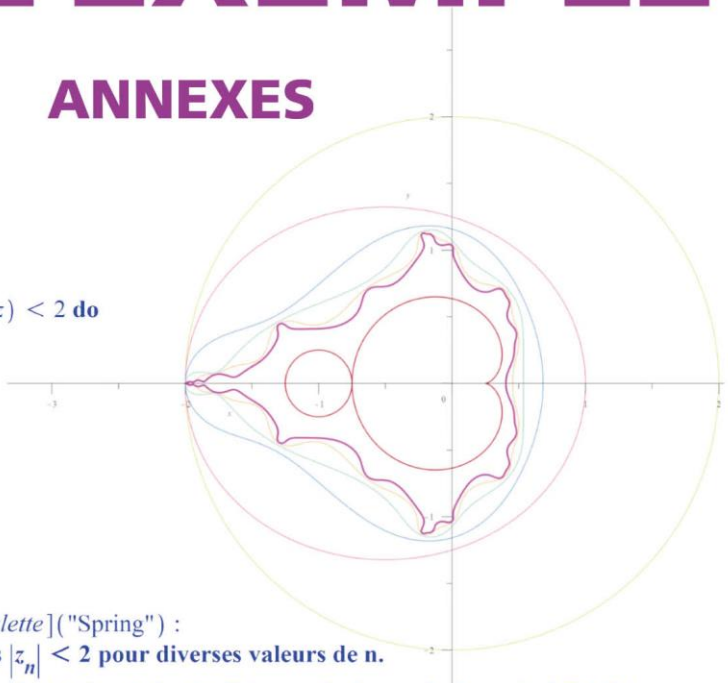
Jean-François IMOKRANE

# MAPLE PAR L'EXEMPLE

## ANNEXES

```
EnsM := proc(x, y)
 local c, k, z;
 z := 0;
 c := x + i·y;
 for k from 1 to 600 while abs(z) < 2 do
 z := z^2 + c;
 end do;
k;
 end proc:
```



```
z := n→z^2(n − 1) + c :
z(0) := 0 : c := x + i·y :
Couleurs := ColorTools[GetPalette]("Spring") :
```

**On trace les courbes implicites $|z_n| < 2$ pour diverses valeurs de n.**

```
#Mz6 := implicitplot([seq(abs(z(k + 1)) = 2, k = 0 ..5)], x = −2 ..2, y = −2 ..2, grid = [52, 52],
    color = GetColors(Couleurs)[7 ..12], thickness = [0, 0, 0, 0, 0, 3])
```

$$H_f := \left[\left[ -e^{-\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}}(2+\sin(yx)) + \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}}(2+\sin(yx))}{25} \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{2x e^{-\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}} y\cos(yx)}{5} - e^{-\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}} y^2 \sin(yx), \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{2xy e^{-\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}}(2+\sin(yx))}{5} - \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}}\cos(yx)}{5} \right.\right.$$

Cépaduès ÉDITIONS

© CEPAD 2022

ISBN : 978.2.36493.921.9

Le Code de la propriété intellectuelle interdit les copies ou reproductions destinées à une utilisation collective. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayant droit ou ayant cause, est illicite et constitue une contrefaçon, aux termes des articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle..

Dépôt légal : février 2022

# À PROPOS DE MAPLE

**Maple** est un logiciel de calcul formel propriétaire développé depuis les années 1980, et aujourd'hui édité par la société canadienne Maplesoft.

Ce logiciel a été conçu pour réaliser une très grande variété d'opérations mathématiques incluant notamment l'algèbre, l'algèbre linéaire, le calcul sous toutes ses formes (le calcul « classique » et différentiel, formel ou non), ainsi que les représentations graphiques en deux et trois dimensions, avec ou sans animation.

L'interface permet de manipuler tous les types d'objets mathématiques, soit via une riche interface graphique et un mode « commandes » à l'exécution immédiate, soit au moyen d'un langage de programmation intégré.

Maple est utilisé sur un large spectre du domaine de la science (Mathématiques, physique, chimie…). Il est assez largement distribué dans les mondes industriel et académique, ce dernier englobant spécifiquement en France, les lycées, les classes préparatoires, les universités, les BTS, les IUT et les laboratoires de recherche.

À la date de finalisation de cet ouvrage, la version en exploitation est la version **Maple 2021**.

# TABLE DES MATIÈRES

**Annexe 1 – E2 - Requins et Sardines** ..... **1**
**Annexe 2 – E2 - Lièvres et Lynx** ..... **2**
**Annexe 3 – E3 - Aiguille de Buffon** ..... **3**
**Annexe 4 – E5 - Fréquence des lettres** ..... **4**
**Annexe 5 – E5 - « Tirade du nez »** ..... **5**
**Annexe 6 – F3 Transformation conforme** ..... **6**
**Annexe 7 – F4 - Profil NACA 2412** ..... **7**
**Annexe 8 – F5 - Schwarz-Christoffel** ..... **8**
**Annexe 9 – F9 - Boîtes à moustaches** ..... **9**

# Annexe 1 – E2 - Requins et Sardines

| Année | Requins | Sardines |
|---|---|---|
| **1914** | 11,9 | 88,1 |
| **1915** | 21,4 | 78,6 |
| **1916** | 22,1 | 77,9 |
| **1917** | 21,2 | 78,8 |
| **1918** | 36,4 | 63,6 |
| **1919** | 27,3 | 72,7 |
| **1920** | 16 | 84 |
| **1921** | 15,9 | 84,1 |
| **1922** | 14,8 | 85,2 |
| **1923** | 10,7 | 89,3 |

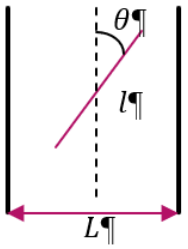
# Annexe 2 – E2 - Lièvres et Lynx

| Année | Lièvres | Lynx | Année | Lièvres | Lynx | Année | Lièvres | Lynx |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1845** | 19,58 | 30,09 | **1876** | 97,12 | 46,34 | **1907** | 23,37 | 6,30 |
| **1846** | 19,60 | 45,15 | **1877** | 86,51 | 45,77 | **1908** | 21,54 | 3,41 |
| **1847** | 19,61 | 49,15 | **1878** | 72,17 | 44,15 | **1909** | 26,34 | 5,44 |
| **1848** | 11,99 | 39,52 | **1879** | 38,32 | 36,33 | **1910** | 53,10 | 11,65 |
| **1849** | 28,04 | 21,23 | **1880** | 10,11 | 12,03 | **1911** | 68,48 | 20,35 |
| **1850** | 58,00 | 8,42 | **1881** | 7,74 | 12,60 | **1912** | 75,58 | 32,88 |
| **1851** | 74,60 | 5,56 | **1882** | 9,67 | 18,34 | **1913** | 57,92 | 39,55 |
| **1852** | 75,09 | 5,08 | **1883** | 43,12 | 35,14 | **1914** | 40,97 | 43,36 |
| **1853** | 88,48 | 10,17 | **1884** | 52,21 | 43,77 | **1915** | 24,95 | 40,83 |
| **1854** | 61,28 | 19,60 | **1885** | 134,85 | 65,69 | **1916** | 12,59 | 30,36 |
| **1855** | 74,67 | 32,91 | **1886** | 134,86 | 79,35 | **1917** | 4,97 | 17,18 |
| **1856** | 88,06 | 34,38 | **1887** | 103,79 | 51,65 | **1918** | 4,50 | 6,82 |
| **1857** | 68,51 | 29,59 | **1888** | 46,10 | 32,59 | **1919** | 11,21 | 3,19 |
| **1858** | 32,19 | 21,30 | **1889** | 15,03 | 22,45 | **1920** | 56,60 | 3,52 |
| **1859** | 12,64 | 13,69 | **1890** | 24,20 | 16,16 | **1921** | 69,63 | 9,94 |
| **1860** | 21,49 | 7,65 | **1891** | 41,65 | 14,12 | **1922** | 77,74 | 20,30 |
| **1861** | 30,35 | 4,08 | **1892** | 52,34 | 20,38 | **1923** | 80,53 | 31,99 |
| **1862** | 2,18 | 4,09 | **1893** | 53,78 | 33,33 | **1924** | 73,38 | 42,36 |
| **1863** | 152,65 | 14,33 | **1894** | 70,40 | 46,00 | **1925** | 36,93 | 49,08 |
| **1864** | 148,36 | 38,22 | **1895** | 85,81 | 51,41 | **1926** | 4,64 | 53,99 |
| **1865** | 85,81 | 60,78 | **1896** | 56,69 | 46,43 | **1927** | 2,54 | 52,25 |
| **1866** | 41,41 | 70,77 | **1897** | 16,59 | 33,68 | **1928** | 1,80 | 37,70 |
| **1867** | 14,75 | 72,77 | **1898** | 6,16 | 18,01 | **1929** | 2,39 | 19,14 |
| **1868** | 2,28 | 2,68 | **1899** | 2,30 | 8,86 | **1930** | 4,23 | 6,98 |
| **1869** | 5,91 | 16,39 | **1900** | 12,82 | 7,13 | **1931** | 19,52 | 8,31 |
| **1870** | 9,95 | 9,83 | **1901** | 4,72 | 9,47 | **1932** | 82,11 | 16,01 |
| **1871** | 10,44 | 5,80 | **1902** | 4,73 | 14,86 | **1933** | 89,76 | 24,82 |
| **1872** | 70,64 | 5,26 | **1903** | 37,22 | 31,47 | **1934** | 81,66 | 29,70 |
| **1873** | 50,12 | 18,91 | **1904** | 69,72 | 60,57 | **1935** | 15,76 | 35,40 |
| **1874** | 50,13 | 30,95 | **1905** | 57,78 | 63,51 | | | |
| **1875** | 101,25 | 31,18 | **1906** | 28,68 | 54,70 | | | |

# Annexe 3 – E3 - Aiguille de Buffon

```
Chute_Aiguilles := proc(n)
 local i, L, l, NAC, Courbe, Cste_Pi:global p, x, y, θ, Chute, Approx_Pi, Espérance_x, Variance_x, Graphe;
 # Initialisation des données
 L := 2; l := 2; NAC := 0;
  for i from 1 to n do
 # Génération des nombres aléatoires. Abscisse dans [0, 2] et l'angle dans [0, π]
  x[i] := 2 GenerateFloat( );
  θ[i] := π·GenerateFloat( );
 # Test d'intersection sur la lame de droite puis de gauche
    if (x[i] + l/2 sin(θ[i]) ≥ L or x[i] - l/2 sin(θ[i]) ≤ 0) then
     NAC := NAC + 1 ;
    end if;
    p[i] := evalf(NAC/i);
    if p[i] ≠ 0 then
     Approx_Pi[i] := evalf(2 l/(L p[i])) else
     Approx_Pi[i] := 0 ;
    end if ;
  end do ;
 Courbe := plot([seq([k, Approx_Pi[k]], k = 1000 ..n)]);
 Cste_Pi := plot(π, x = 1000 ..n, color = blue);
 Graphe := display(Courbe, Cste_Pi, size = [0.4, 0.4]);
 return (Approx_Pi[n]);
end proc
```

- Abscisse $x = 0$ sur la lame de gauche.
- NAC = Nombre d'Aiguilles qui Coupent une lame.

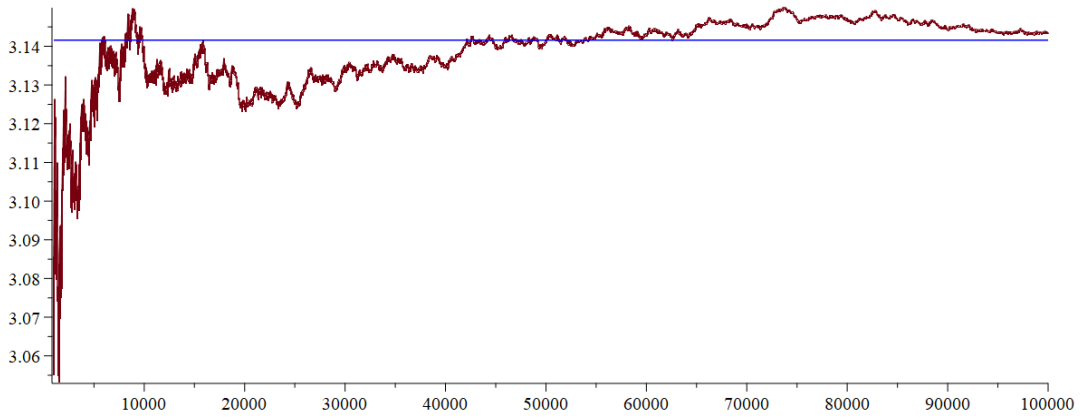



**Approximation de $\pi$ :**

$> Chute - Aguilles(100000)$ 3.143319660

**Graphe de convergence de 1000 à 100000 lancers :**

$> Graphe$



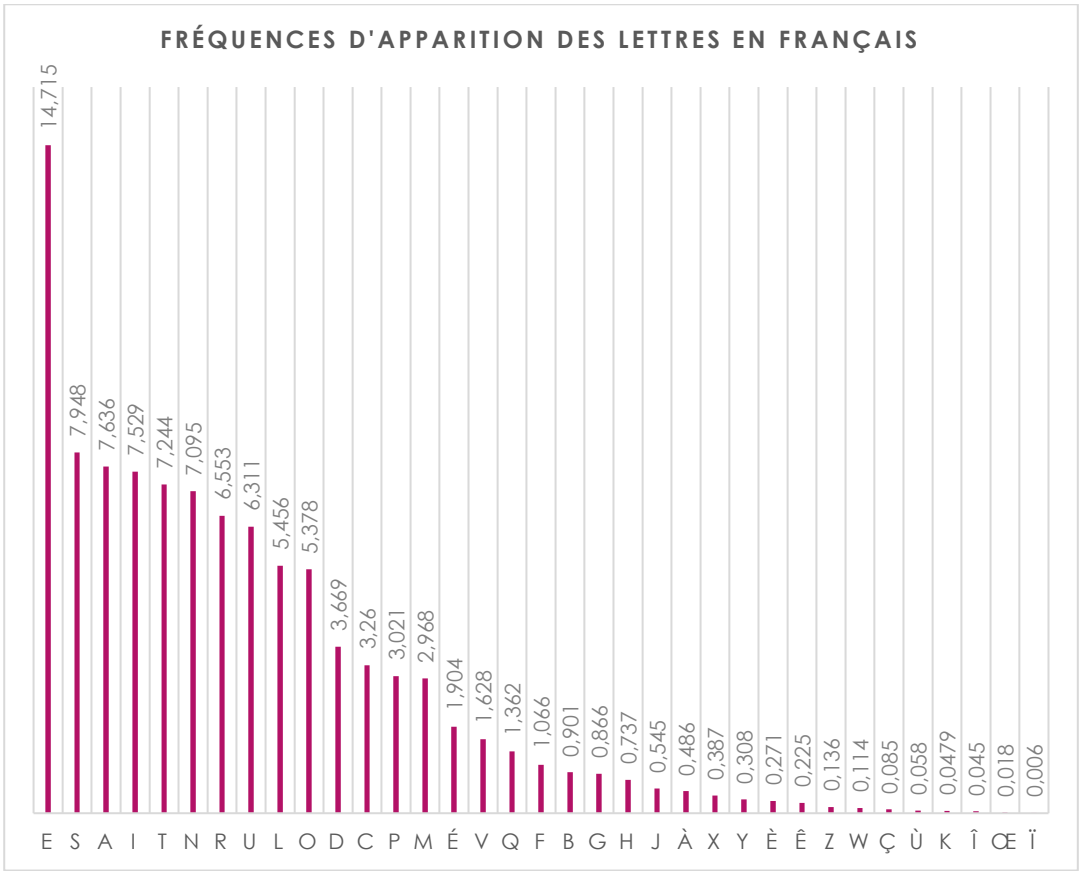
# Annexe 4 – E5 - Fréquence des lettres

En français, comme dans beaucoup de langues, les lettres n'apparaissent pas à la même fréquence. Cette fréquence diffère de celle de la liste des mots d'un dictionnaire. En effet, très peu de mots apparaissent au pluriel, ce qui conduit la lettre « s » à y être moins fréquente que dans un texte. De plus, les lettres accentuées « à » et « ù » apparaissent dans un nombre très limité de mots, mais dont certains sont d'usage fréquent (à, où), ce qui contribue à en modifier la fréquence relative.

**Représentation des caractères non accentués**

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,636 | 0.901 | 3.260 | 3.669 | 14,715 | 1.066 | 0.866 | 0.737 | 7,529 | 0.545 |
| K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
| 0.047 | 5,456 | 2.968 | 7,095 | 5.378 | 3.021 | 1.362 | 6,553 | 7,948 | 7,244 |
| U | V | W | X | Y | Z | | | | |
| 6,311 | 1.628 | 0.114 | 0.387 | 0.308 | 0.136 | | | | |

**Répartition complétée avec les caractères accentués**



# Annexe 5 – E5 - « Tirade du nez »

Voici le texte déchiffré avec la clé « CYRANO », à partir du chiffré de Vigenère.

**Cyrano de Bergerac – Edmond Rostand (Extrait)**

AHNONCESTUNPEUCOURTJEUNEHOMMEONPOUVAITDIREOHDIEUBIEN
DESCHOSESENSOMMEENVARIANTLETONPAREXEMPLETENEZAGRESSIF
MOIMONSIEURSIJAVAISUNTELNEZILFAUDRAITSURLECHAMPQUEJEME
LAMPUTASSEAMICALMAISILDOITTREMPERDANSVOTRETASSEPOUR
BOIREFAITESVOUSFABRIQUERUNHANAPDESCRIPTIFCESTUNROCCEST
UNPICCESTUNCAPQUEDISJECESTUNCAPCESTUNEPENINSULECURIEUX
DEQUOISERTCETTEOBLONGUECAPSULEDECRITOIREMONSIEUROUDE
BOITEACISEAUXGRACIEUXAIMEZVOUSACEPOINTLESOISEAUXQUE
PATERNELLEMENTVOUSVOUSPREOCCUPATESDETENDRECEPERCHOIR
ALEURSPETITESPATTESTRUCULENTCAMONSIEURLORSQUEVOUS
PETUNEZLAVAPEURDUTABACVOUSSORTELLEDUNEZSANSQUUN
VOISINNECRIEAUFEUDECHEMINEEPREVENANTGARDEZVOUSVOTRE
TETEENTRAINEEPARCEPOIDSDETOMBERENAVANTSURLESOLTENDRE
FAITESLUIFAIREUNPETITPARASOLDEPEURQUESACOULEURAUSOLEIL
NESEFANEPEDANTLANIMALSEULMONSIEURQUARISTOPHANEAPPELLE
HIPPOCAMPOELEPHANTOCAMELOSDUTAVOIRSOUSLEFRONTTANTDE
CHAIRSURTANTDOSCAVALIERQUOILAMICECROCESTALAMODEPOUR
PENDRESONCHAPEAUCESTVRAIMENTTRESCOMMODEEMPHATIQUE
AUCUNVENTNEPEUTNEZMAGISTRALTENRHUMERTOUTENTIEREXCEPTE
LEMISTRALDRAMATIQUECESTLAMERROUGEQUANDILSAIGNEADMIRATIF
POURUNPARFUMEURQUELLEENSEIGNELYRIQUEESTCEUNECONQUEETES
VOUSUNTRITONNAIFCEMONUMENTQUANDLEVISITETONRESPECTUEUX
SOUFFREZMONSIEURQUONVOUSSALUECESTLACEQUISAPPELLEAVOIR
PIGNONSURRUECAMPAGNARDHEARDECESTYUNNEZNANAINCEST
QUEUQUNAVETGEANTOUBENQUEUQUMELONNAINMILITAIREPOINTEZ
CONTRECAVALERIEPRATIQUEVOULEZVOUSLEMETTREENLOTERIE
ASSUREMENTMONSIEURCESERALEGROSLOTENFINPARODIANTPYRAM
EENUNSANGLOTLEVOILADONCCENEZQUIDESTRAITSDESONMAITREA
DETRUITLHARMONIEILENROUGITLETRAITREVOILACEQUAPEUPRES
MONCHERVOUSMAURIEZDITSIVOUSAVIEZUNPEUDELETTRESETDESPRIT
MAISDESPRITOLEPLUSLAMENTABLEDESETRESVOUSNENEUTESJAMAIS
UNATOMEETDELETTRESVOUSNAVEZQUELESTROISQUIFORMENTLEMOT
SOTEUSSIEZVOUSEUDAILLEURSLINVENTIONQUILFAUTPOURPOUVOIR
LADEVANTCESNOBLESGALERIESMESERVIRTOUTESCESFOLLES
PLAISANTERIESQUEVOUSNENEUSSIEZPASARTICULELEQUARTDELA
MOITIEDUCOMMENCEMENTDUNECARJEMELESSERSMOIMEME
AVECASSEZDEVERVEMAISJENEPERMETSPASQUUNAUTREMELESSERVE

# Annexe 6 – F3
# Transformation conforme

Les transformations conformes sont beaucoup étudiées dans le domaine de l'analyse complexe. Elles sont particulièrement utiles en mathématiques appliquées. En effet, elles permettent de simplifier certains problèmes par transformation des solutions de l'équation de Laplace d'un domaine donné en solutions de l'équation de Laplace sur un domaine plus simple. Elles se fondent sur le théorème de l'application conforme énoncé par B. Riemann dans sa thèse en 1851 : soit $U$ un ouvert simplement connexe non vide du plan complexe. Il existe une bijection holomorphe entre $U$ et le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$.

Ci-dessous quelques transformations conformes usuelles, telles celles de Joukowski (Voir les fiches n°3 et n°4), de Karman-Trefftz, de Von Mises, ainsi que celle de Schwarz et Christoffel (Voir la fiche n°5).

| NOM | TRANSFORMATION |
|---|---|
| **Joukowski** | $\boldsymbol{z = Z + \frac{a^2}{Z}}$ |
| **Karman-Trefftz** | $\boldsymbol{\frac{z - k.a}{z + k.a} = \left(\frac{Z - a}{Z + a}\right)^k}$<br>$1 \leq k \leq 2$ |
| **Von Mises** | $\boldsymbol{\frac{dz}{dZ} = \left(1 - \frac{a}{Z}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{\mu_1}{Z}\right)\ldots\left(1 - \frac{\mu_n}{Z}\right)}$<br>$\sum_{i=1}^{n} \mu_i + (k-1)a = 0 \quad et \quad \lvert\mu_i\rvert < a$ |
| **Schwarz et Christoffel** | $\boldsymbol{\frac{dz}{dZ} = K(Z - Z_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\ldots(1 - Z_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}}$<br>$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi$<br>(Dans le cas d'un polygone fermé à $n$ côtés) |

# Annexe 7 – F4 - Profil NACA 2412

Les profils NACA sont des profils aérodynamiques caractérisant les ailes d'avions et développés à partir de 1935 par la NACA, National Advisory Committee for Aeronautics ou comité consultatif pour l'aéronautique. Le profil NACA 2412 possède une cambrure maximale de 2 % et une épaisseur maximale de 12 %. Le très populaire Cessna 172 Skyhawk est un avion de tourisme monomoteur à quatre places dont les ailes ont été conçues selon ce profil NACA 2412. Afin de le matérialiser avec MAPLE, voici les éléments chiffrés[1] correspondant, et ce conformément aux notations des fiches F3 et F4 :

$$R = 0.4051\ ;\ a = R \text{ puis } a = 0.3672\ ;\ \varepsilon 1 = -0.03697\ ;\ \varepsilon 2 = 0.01622.$$

Pour réaliser cette représentation avec les commandes des fiches F3 et F4, on posera donc :

**Transformation inverse relative à l'écoulement laminaire autour du cercle ($a = R$) :**

$> f := z \to z + \dfrac{a^2}{z}$

$> a = 0.4051: Invf := solve(z = f(y, a), y)$

**Pour l'obtention du profil à pointe à partir du cercle et variant autour du profil NACA 2412 :**

$> R := 0.4051: a := 0.3672: \varepsilon 1 \in [-0.04,0]: \varepsilon 2 \in [0..0.04]:$

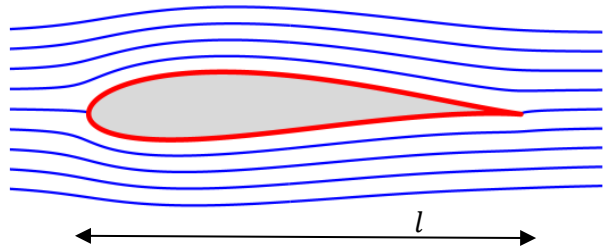
$> Cerlce1 := \varepsilon 1 + i.\varepsilon 1 + R.\exp(i\theta) : f1 := z \to z + \dfrac{a^2}{z}$

**Pour la représentation finale du flux laminaire sur le profil à pointe NACA 2412 :**

$> \varepsilon 1 := -0.03697: \varepsilon 2 := 0.01622$

Pour une représentation bien équilibrée, il est judicieux de remplacer k/10 par k/20 et d'adapter le paramètre $view$ comme suit $view = [-1..1, -0.3..0.3]$

**Profil de Joukowski approchant le profil d'aile du premier CESSNA 172**



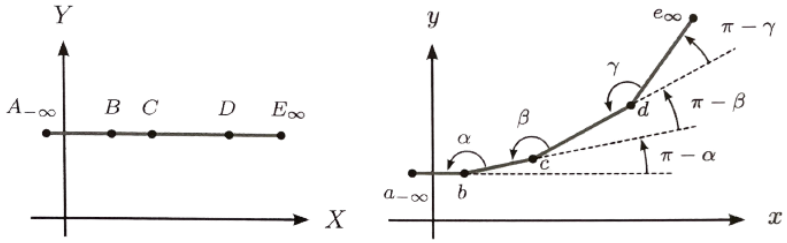

Si l'on nomme $Z_{C1}, Z_{C2}$ les affixes des deux intersections du cercle décentré avec l'axe des abscisses, on a : $(Z_{C2} + |\varepsilon 1|)^2 + \varepsilon 2^2 = R^2\ ; Z_{C1} = -(Z_{C2} + 2|\varepsilon 1|)$. La corde $\boldsymbol{l}$ du profil aérodynamique représente l'écart entre le bord d'attaque et le bord de fuite. On a donc par application de la transformation sur ces deux affixes : $l = f1(Z_{C2}) - f1(Z_{C1})$. $\boldsymbol{l = 1.481}$.

Ce profil de Joukowski est une approximation en corde, en maximum de cambrure et en épaisseur du premier CESSNA 172. Il s'en différencie toutefois par un nez probablement un peu plus bulbeux et davantage de courbures dans la moitié arrière de la corde.

[1] Source : The Joukowski airfoil at different viscosities

# Annexe 8 – F5 - Schwarz-Christoffel

La transformation conforme de Schwarz-Christoffel a été trouvée dans les années 1860 par les mathématiciens allemands, K.H. Schwarz (1843-1921) et E.B. Christoffel (1829-1900). Elle permet de réaliser des transformations conformes qui notamment envoient le demi-plan supérieur ($Im(Z) > 0$) sur des domaines simplement connexes délimités par des polygones. Sur un exemple simple, illustrons graphiquement[2] le principe :




Les affixes $Z_{A-\infty}, Z_{E\infty}$ matérialisent les zones $-\infty, \infty$ du demi-plan complexe supérieur. Les affixes $Z_{a-\infty}, Z_{e\infty}$ matérialisent les zones $-\infty, \infty$ du demi-plan géométrique correspondant. Les points particuliers sont ceux d'affixes $Z_B, Z_C, Z_D$. Par la transformation de Schwarz-Christoffel on leur fait correspondre les affixes $Z_a, Z_b, Z_c$, affixes qui matérialisent une ligne brisée dont les segments successifs forment les angles $\alpha, \beta, \gamma$. La transformation correspondante s'écrit sous la forme différentielle suivante :

$$\frac{dz}{dZ} = K(Z - Z_B)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(Z - Z_C)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(Z - Z_D)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}$$

Pour générer un polygone fermé de $n$ points dans le plan géométrique on doit donc choisir les angles $\alpha_i$ de telle sorte que :

$$\sum_i^n \alpha_i = (n-2)\pi$$

[2] Source : A. Giovannini et C. Airiau, Aérodynamique fondamentale, Cépaduès, 2016

# Annexe 9 – F9 - Boîtes à moustaches

**Représentation des deux distributions des nids de roitelet et de merle.**

```
> restart: with(Statistics):
> R := [19.8, 22.1, 21.5, 20.9, 22, 21, 22.3, 21, 20.3, 20.9, 22, 20, 20.8, 21.2, 21]:
> M := [21.8, 23, 23.3, 22.4, 22.4, 23, 23, 23, 23.9, 22.3, 22, 22.6, 22, 22.1, 21.1, 23]:
> BoxPlot([R, M], color = ["MediumSeaGreen","Purple"])
```

